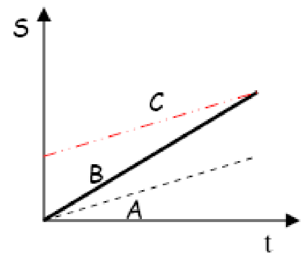
FORMULARIO DE CINEMÁTICA

1. MOVIMIENTOS RECTILINEOS (Desplazamiento horizontal con notación vectorial)

Movimiento rectilíneo uniforme:

$\vec{x} = \vec{x_o} + \vec{v} \cdot t$ (Ecuación de la posición)

- **GRÁFICOS s-t**

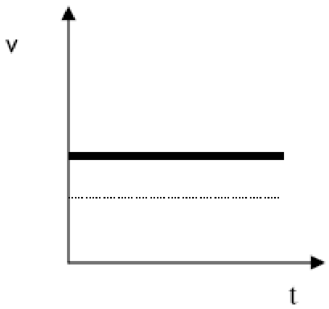


* Si parte del pto. de ref. pasa por el (0,0).

* A mayor pendiente mayor velocidad.

* No confundir esta representación con la trayectoria (camino) seguido por el móvil.

- **GRÁFICOS v-t**



* En un M.R.U., v es cte., es decir, no varía.

* En la representación siempre obtenemos líneas horizontales.

* No confundir estos gráficos con los de reposo (s-t), en los que no hay movimiento.

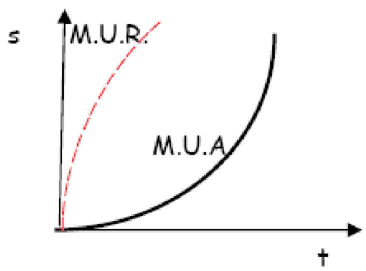
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$\vec{x} = \vec{x_o} + \vec{v_o} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$ (Ecuación de la posición)

$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a} \cdot t$ (Ecuación de la velocidad)

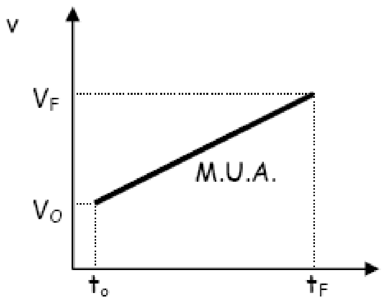
$v^2 = v_o^2 \pm 2as$ ….(Ecuación que relaciona la velocidad y el espacio recorrido)

- **GRÁFICOS s-t**



* Ahora la posición no varía linealmente con el tiempo (líneas curvas).
* Es posible conocer la velocidad a partir de la representación gráfica (trazando la tangente en un punto de la curva).
* Si partió del pto. de ref. pasa por (0,0).

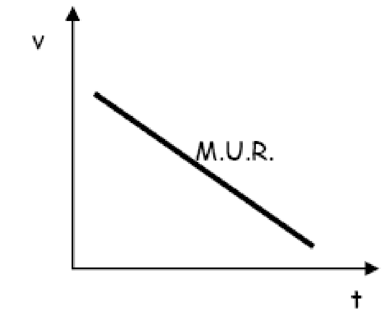
- **GRÁFICOS v-t**



* A medida que aumenta el tiempo lo hace la velocidad, lo que supone que a > 0 (+).

* Para calcular la aceleración a partir de de la gráfica, tomamos dos puntos y:

$$\boxed{a = \frac{V_F - V_O}{t_F - t_O}}$$



* Ahora vemos que a medida que aumenta el tiempo, la velocidad disminuye. Por tanto, la aceleración será: a < 0 (-).

* Seguiríamos el mismo procedimiento para el cálculo de la aceleración.

La gráfica de la aceleración-tiempo es siempre una recta horizontal

2. MOVIMIENTOS RECTILINEOS (Desplazamiento vertical con notación vectorial)

$$\vec{y} = \vec{y_o} \pm \vec{v_o} \cdot t - \frac{1}{2}\vec{g} \cdot t^2$$ (Ecuación de la posición)

$$\vec{v} = \vec{v_o} - \vec{g} \cdot t$$ (Ecuación de la velocidad)

Recuerda: El convenio de signos, las magnitudes con dirección hacia la derecha y hacia arriba son positivas y las que van hacia la izquierda y hacia abajo son negativas.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS

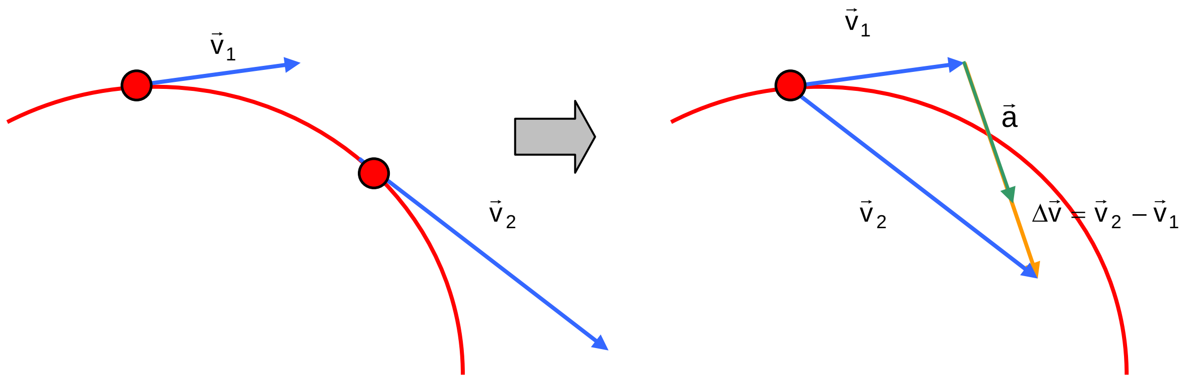
1. Lee detenidamente el problema las veces necesarias hasta que tengas claro que pide y que datos nos están dando.
2. Haz un dibujo o esquema que represente el enunciado.
3. Considera un punto o sistema de referencia.
4. Elige el criterio de signos más conveniente.
5. Identifica el tipo de movimiento.
6. Anota las ecuaciones de dicho movimiento.
7. Elige la ecuación más conveniente y sustituye las variables por sus valores.
8. Interpreta el resultado y analiza si es lógico.

Cl. Miguel Fleta, 25
44600-Alcañiz (Te)
Tel/Fax: 978 83 33 06
www.academia-nipho.es

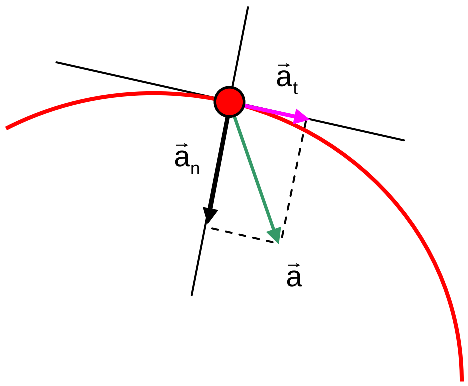
MOVIMIENTO CIRCULAR

Cuando un móvil describe una trayectoria que es una circunferencia decimos que su movimiento es circular.

Cuando su velocidad varía en módulo y dirección (tangente a la trayectoria) diremos que describe un movimiento circular uniformemente variado. Su aceleración sería el vector verde del dibujo.



Si descomponemos dicho vector en dos componentes: una tangente a la trayectoria (aceleración tangencial) y otra perpendicular (aceleración normal) según el esquema, observamos que todo movimiento circular consta de estos dos tipos de aceleración.



La aceleración tangencial mide la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad.

La aceleración normal mide la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad.

$$a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

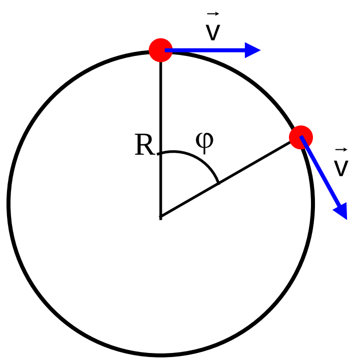
Nosotros sólo vamos a estudiar **el movimiento CIRCULAR UNIFORME**

En el movimiento circular uniforme la trayectoria es una circunferencia que es recorrida con velocidad constante.

Hay que tener en cuenta que aunque el módulo del vector velocidad no varía ($a_t = 0$), **su dirección varía constantemente (por tanto tiene aceleración normal)**

El movimiento circular uniforme tiene aceleración que apunta constantemente en la dirección del centro de la trayectoria. Es la aceleración normal o centrípeta

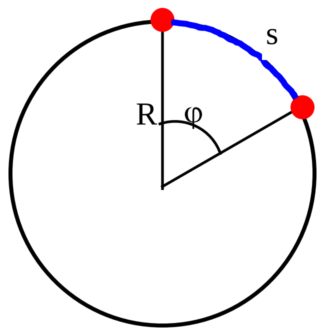
$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$



Cl. Miguel Fleta, 25
44600-Alcañiz (Te)
Tel/Fax: 978 83 33 06
www.academia-nipho.es

Si se considera un punto girando en una circunferencia es fácil concluir que es mucho más sencillo medir el ángulo girado en un intervalo de tiempo que el arco recorrido (señalado en azul en el dibujo). Por esto se define la **velocidad angular** ω como la rapidez con que se describe el ángulo (φ):

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}} \qquad \boxed{\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$



El ángulo (φ), debe medirse en **radianes:**

$$\varphi\ (\text{rad}) = \frac{\text{longitud arco (m)}}{\text{radio circunferencia (m)}} = \frac{s}{R}$$

Según esta definición:
1 vuelta = 360 ^{0} = 2 π radianes
½ vuelta = 180 ^{0} = π radianes
¼ de vuelta = 90 ^{0} = π /2 radianes

Para convertir vueltas o grados a radianes:

$$30\ ^0\ \frac{\pi\ \text{rad}}{180\ ^0} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

$$0{,}9\ \cancel{\text{vueltas}}\ \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{vuelta}}} = 1{,}8\ \pi\ \text{rad}$$

En el Sistema Internacional (S.I.) la velocidad angular se mide en $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ o en $\frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$ (el radian no tiene dimensiones)
Otras unidades (no S.I.) son:

$$\frac{\text{vueltas}}{\text{s}} \quad ; \quad \frac{\text{revoluciones}}{\text{min}} = \text{r.p.m}$$

Entre la velocidad lineal y la angular existe la siguiente relación: $\boxed{V = \omega \cdot R}$

De la definición de velocidad angular (ver más arriba) se deduce la relación entre la velocidad angular **ω** y el ángulo girado **φ:**

$$\boxed{\varphi = \omega\ .\ t}$$

Si cuando empieza a contarse el tiempo (t = 0) el punto ya ha descrito un ángulo φ_0, entonces el ángulo girado en un tiempo t será:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega.t}$$

El movimiento circular uniforme **es un movimiento periódico**, ya que se repite a intervalos regulares.

Se denomina **periodo (T)** al tiempo que el punto tarda en dar una vuelta. Se mide en segundos (s)

Se denomina **frecuencia (f)** al número de vueltas que el punto da en un segundo. La frecuencia se mide en s^{-1} o **Hz** (hertzios)

Periodo y frecuencia son magnitudes inversamente proporcionales: $T = \frac{1}{f}$; $f = \frac{1}{T}$; T . f = 1

Teniendo en cuenta las definiciones de periodo, frecuencia y velocidad angular, se puede poner:

$$\omega = \frac{2\ \pi}{T} = 2\ \pi\ \frac{1}{T} = 2\ \pi\ f$$

Academia NIPHO
Cl. Miguel Fleta, 25
44600-Alcañiz (Te)
Tel/Fax: 978 83 33 06
www.academia-nipho.es

La aceleración normal o centrípeta, para un movimiento circular y uniforme vale:

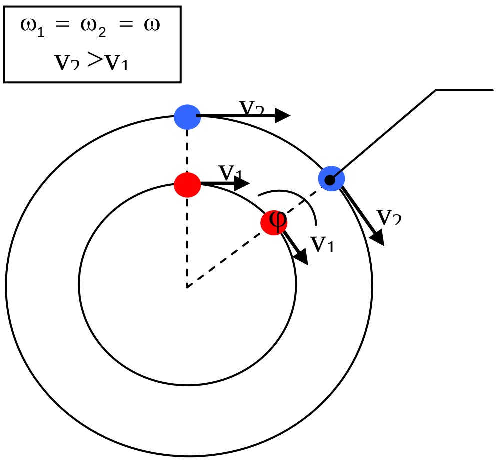
$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{v^2}{R} \\ v = \omega R \end{array}\right\} a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Teniendo en cuenta esta expresión podemos comparar las aceleraciones normales o centrípetas para puntos que se mueven con movimiento circular uniforme siguiendo trayectorias distintas;

- Consideremos dos puntos que se mueven con ***idéntica velocidad angular***, uno de ellos situado en la periferia de un disco y el otro más al interior. Según la ecuación que relaciona aceleración normal, velocidad angular y radio:

$$a_n = \omega^2 R$$

La aceleración normal del punto más exterior será mayor, ya que lo es su radio de giro, mientras que ***el punto más interior tendrá una aceleración normal más baja.*** Esto puede parecer desconcertante a primera vista, pero hemos de tener en cuenta que el punto más externo tiene una velocidad lineal (v) mayor (recorre su trayectoria más rápido), lo que trae como consecuencia una mayor rapidez en la variación de la dirección del vector velocidad.

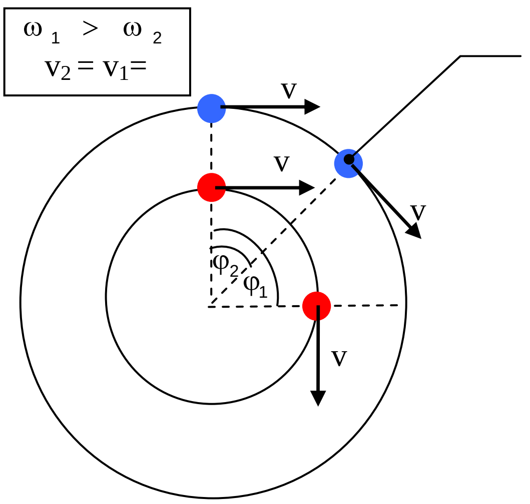


Como su velocidad angular es la misma ambos puntos giran el mismo ángulo en un tiempo t, pero el más exterior recorre un mayor espacio sobre su trayectoria (mayor velocidad lineal).

- Considerando ahora dos puntos que recorran trayectorias de distinto radio y ***con la misma velocidad lineal***, tendremos:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración normal será mayor cuanto menor sea el radio. ***El punto que recorre una trayectoria más cerrada tiene una aceleración normal superior***



Ambos puntos recorren la misma distancia medida sobre la trayectoria en un tiempo t (igual velocidad lineal), por tanto el más interior recorre un ángulo mayor que el más exterior (mayor velocidad angular). El punto más interior cambia la dirección del vector velocidad más rápido.

Cl. Miguel Fleta, 25
44600-Alcañiz (Te)
Tel/Fax: 978 83 33 06
www.academia-nipho.es

Ejemplo 1

Un punto describe una trayectoria circular de 30 cm de radio tardando 3,52 s en dar cinco vueltas. Calcular:

a) La velocidad angular en r.p.m y en rad/s

b) El periodo y la frecuencia del movimiento

c) El ángulo girado al cabo de 0,85 s de iniciado el movimiento.

d) Su aceleración centrípeta

Solución:

a) $$\omega = \frac{5 \text{ vueltas}}{3{,}52 \cancel{s}} \cdot \frac{60 \cancel{s}}{1 \text{ min}} = 85{,}23 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = 85{,}23 \text{ r.p.m.}$$

$$\omega = \frac{5 \cancel{\text{vueltas}}}{3{,}52 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{vuelta}}} = 2{,}84\ \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1}$$

b) $$T = \frac{3{,}52 \text{ s}}{5} = 0{,}704 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}704 \text{ s}} = 1{,}420 \text{ s}^{-1} = 1{,}420 \text{ Hz}$$

c) $\varphi = \omega \cdot t = 2{,}84\ \pi \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}85 \text{ s} = 2{,}41\ \pi \text{ rad} \approx 7{,}58 \text{ rad}$

d) $$a_n = \omega^2 R = (2{,}84\ \pi)^2 \left(s^{-1}\right)^2 0{,}30 \text{ m} = 23{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2

En el laboratorio se estudia el movimiento de un disco, de radio 10 cm, que gira con velocidad constante, midiéndose el tiempo que tarda en dar cinco vueltas. Los valores obtenidos se dan en la tabla adjunta.

Medida	t (s) . Cinco vueltas
1	4,252
2	4,305
3	4,221
4	4,214
5	4,296

a) Calcular la velocidad angular del disco.

b) Determinar la velocidad lineal de un punto de su periferia y de otro situado a 3 cm del centro.

c) ¿Cuánto tardará en girar 120 ^{0}?

Solución:

a) Calculamos el periodo del movimiento (tiempo que tarda en dar una vuelta), hallando la media de los valores obtenidos y dividiendo por cinco:

t_{med} = 4,258 s ; T = 0,852 s.

Cálculo de la velocidad angular :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}852 \text{ s}} = 2{,}35\pi \text{ s}^{-1} \approx 7{,}38 \text{ s}^{-1} = 7{,}38 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

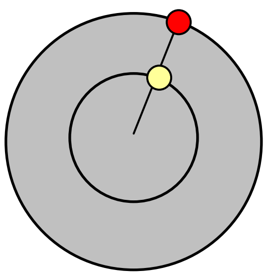
b) Un punto situado en la periferia del disco describirá una circunferencia de radio 10 cm = 0,10 m

$v = \omega \cdot R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}10 \text{ m} = 0{,}235\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}74 \text{ m/s}$

Par el punto situado a 3 cm del centro : R = 3 cm = 0,03 m:

$v = \omega \cdot R = 2{,}35\ \pi \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}03 \text{m} = 0{,}0705\ \pi \text{ s}^{-1} \approx 0{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}22 \text{ m/s}$

Como se deduce del cálculo ambos puntos giran con idéntica velocidad



angular (ω), ya que recorren el mismo ángulo, pero la velocidad lineal aumenta a medida que nos desplazamos hacia la periferia.

c) Pasamos los grados a radianes: $120^0 \dfrac{\pi \text{ rad}}{180^0} = 0,67\pi \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad ; \quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{0,67\pi}{2,35\pi \text{ s}^{-1}} = 0,283 \text{ s}$$

Ejemplo 3

Un punto recorre una trayectoria circular de radio 36 cm con una frecuencia de 0,25 s^{-1}.

a) Calcular el periodo del movimiento.

b) Calcular la velocidad angular y la lineal.

c) Determinar el ángulo girado en 1,54 s.

d) La aceleración normal o centrípeta.

Solución:

a) $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{0,25 \text{ s}^{-1}} = 4 \text{ s}$

b) $\omega = 2\pi f = 2\pi\, 0,25 \text{ s}^{-1} = 0,5\pi \text{ s}^{-1} \approx 1,57 \text{ s}^{-1}$

$v = \omega R = 0,5\pi \text{ s}^{-1}\, 0,36 \text{ m} = 0,18\pi \text{ m s}^{-1} = 0,18\pi \text{ m/s} \approx 0,57 \text{ m/s}$

c) $\varphi = \omega t = 0,5\pi \text{ m s}^{-1}\, 1,54 \text{ s} = 0,77\pi \text{ rad}$

$$0,77\pi\, \cancel{\text{rad}} \frac{180^0}{\pi\, \cancel{\text{rad}}} = 138,6^0$$

d) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,18\pi)^2 \dfrac{\text{m}^{\cancel{2}}}{\text{s}^2}}{0,36\, \cancel{\text{m}}} = 0,89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

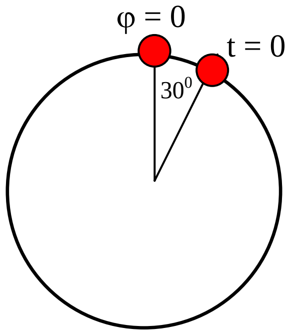
Ejemplo 4

Un punto gira describiendo círculos con velocidad constante de forma tal que describe un ángulo de 180 ^{0} en 1,543 s.

a) Calcular su velocidad angular

b) Determinar el periodo y la frecuencia del movimiento

c) Suponiendo que los ángulos empiezan a contarse a partir del punto más alto de la trayectoria y que el cronómetro se pone en marcha cuando el punto está formando un ángulo de 30^0 con la vertical (ver esquema) ¿en qué posición se encuentra el punto cuando transcurran 2,500 s?



Solución:

a) $\omega = \dfrac{\pi \text{ rad}}{1,543 \text{ s}} = 0,65\,\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,65\,\pi \text{ s}^{-1}$

b) Tarda 1,543 s en dar media vuelta (180 ^{0}), luego tardará : 2 . 1,543 = 3,086 s en dar una vuelta completa. Por tanto: T = 3,086 s. $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{3,086 \text{ s}} = 0,32 \text{ s}^{-1}$

c) $30^0 \dfrac{\pi \text{ rad}}{180} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$ $\quad \varphi = \varphi_0 + \omega t = \dfrac{\pi}{6} + 0,65\,\pi \text{ s}^{-1}\, 2,50 \text{ s} = \dfrac{\pi}{6} + 1,625\,\pi = \pi\,(\dfrac{1}{6} + 1,625)$ $= 1,79\,\pi \text{ rad}$

$$1,79\,\pi \text{ rad} \frac{180^0}{\pi \text{ rad}} = 322,2^0$$